ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

oOo

NGUYỄN THỊ MẬN

VỀ PHƯƠNG TRÌNH HÀM CAUCHY VÀ ỨNG DỤNG

THÁI NGUYÊN, 5/2017

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

———————o0o———————

NGUYỄN THỊ MẬN

VỀ PHƯƠNG TRÌNH HÀM CAUCHY VÀ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 60 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

GIÁO VIÊN HƯỚNG DẪN
TS. TRẦN XUÂN QUÝ

THÁI NGUYÊN, 5/2017

Mục lục

Mở đầu **2**

Chương 1. Phương trình hàm Cauchy **4**

1.1. Phương trình hàm Cauchy một biến 6

1.1.1. Về phương trình hàm Cauchy cộng tính 6

1.1.2. Phương trình hàm cộng tính trên không gian phức 11

1.1.3. Phương trình hàm Cauchy mũ 14

1.1.4. Phương trình hàm Cauchy Logarit 17

1.1.5. Phương trình hàm Cauchy nhân tính 18

1.2. Phương trình Cauchy nhiều biến 23

1.2.1. Phương trình Cauchy cộng tính nhiều biến . . . 23

1.2.2. Phương trình hàm Cauchy nhân tính nhiều biến . 27

1.2.3. Hai phương trình hàm Cauchy nhiều biến khác . 28

1.3. Mở rộng của phương trình hàm Cauchy 29

1.4. Một số bài toán áp dụng 35

Chương 2. Một số ứng dụng của phương trình hàm Cauchy **37**

2.1. Tổng các lũy thừa của số nguyên 37

2.1.1. Tổng của n số tự nhiên đầu tiên 38

2.1.2. Tổng bình phương của n số tự nhiên đầu tiên . . 39

2.1.3. Tổng lũy thừa k của n số tự nhiên đầu tiên . . . 39

2.2. Tổng lũy thừa của các số trong dãy cấp số cộng 42

2.3. Số cặp có thể rút ra từ n phần tử 43

2.4. Tổng của chuỗi hữu hạn 44

Kết luận **47**

Tài liệu tham khảo **48**

Mở đầu

Phương trình hàm là một nhánh của toán học hiện đại, từ năm 1747 đến 1750 nhà toán học J. D'Alembert đã công bố 3 bài báo liên quan về phương trình hàm, đây được xem là các kết quả đầu tiên về phương trình hàm.

Mặc dù phương trình hàm đã được nghiên cứu trên 260 năm, nhưng nó thực sự được nghiên cứu mạnh trong các lĩnh vực lý thuyết và ứng dụng của toán học chỉ khoảng 100 năm trở lại đây.

Đầu thế kỷ 20, kế tiếp những đóng góp quan trọng của D. Hilbert trong lý thuyết phương trình vi phân, đã làm cho lý thuyết phương trình hàm trở nên rất quan trọng và thu được nhiều kết quả thú vị, chẳng hạn như S. Pincherle (1906, 1912); E. Picard (1928); G. Hardy, J.E. Littlewood and G. Polya (1934); M. Ghermanescu (1960); J.Aczél (1966); and M. Kuczma (1968).

Gần đây, phương trình hàm được rất nhiều nhà Toán học nổi tiếng của thế giới nghiên cứu, và có những đóng góp lớn lao cho cả toán lý thuyết và toán ứng dụng, chẳng hạn như qua các cuốn sách của A.N. Sarkovskii and G.P.Reljuch (1974); J. Aczél and Z. Daŕoczy (1975); J. Dhombres (1979)....

Chính sự phát triển mạnh mẽ của lý thuyết phương trình hàm mà các kết quả của nó đã được xem xét nghiên cứu cho đối tượng học sinh trung học phổ thông. Thể hiện qua các kỳ thi học sinh giỏi quốc gia, các bài toàn về phương trình hàm luôn thu hút BTC quan tâm và lựa chọn.

Vì vậy, đề tài luận văn thạc sĩ phương pháp toán sơ cấp sẽ tập trung vào lớp phương trình hàm cơ bản, đó là: **Về phương trình hàm Cauchy và ứng dụng**.

Luận văn được trình bày trong hai chương.

Chương 1: Phương trình hàm Cauchy

Chương này trình bày các định nghĩa, định lý, chứng minh về phương trình hàm Cauchy và các dạng của nó. Tìm nghiệm của phương trình hàm Cauchy cộng tính, phương trình hàm Cauchy nhân tính, phương trình hàm Cauchy mũ và phương trình hàm Cauchy Logarit. Trình bày mở rộng của phương trình hàm Cauchy. Đưa ra một số bài toán vận dụng phương trình hàm Cauchy cộng tính để giải quyết. Một số bài toán là đề thi học sinh giỏi các nước, được trích từ tài liệu [9] của tác giả Titu Andreescu và Iurie Boreico.

Chương 2: Một số ứng dụng của phương trình hàm Cauchy

Chương này trình bày ứng dụng của phương trình hàm Cauchy trong tính tổng lũy thừa của số nguyên (tổng của n số tự nhiên đầu tiên, tổng bình phương của n số tự nhiên đâu tiên, tổng lũy thừa k của n số tự nhiên đầu tiên), tính tổng lũy thừa của các số trong dãy cấp số cộng, tìm số cặp có thể rút ra từ n phần tử, lực lượng của một tập hợp và tổng của chuỗi hữu hạn.

Để hoàn thiện luận văn trước hết tôi xin gửi lời cảm ơn sâu sắc tới TS. Trần Xuân Quý đã dành thời gian hướng dẫn, đánh giá, chỉ bảo, tận tình giúp đỡ trong quá trình xây dựng đề tài và hoàn thiện luận văn. Qua đây tôi cũng xin gửi lời cảm ơn chân thành tới tất cả các thầy cô, Ban giám hiệu, Khoa Toán - Tin - Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên đã tạo điều kiện, giúp đỡ trong suốt quá trình hoàn thành khóa học.

Tôi mong nhận được sự góp ý của thầy, cô và các bạn.

Thái Nguyên, ngày 05 tháng 5 năm 2017

Tác giả luận văn

Học viên Nguyễn Thị Mận

Chương 1

Phương trình hàm Cauchy

Việc nghiên cứu về hàm cộng tính có từ thời A.M. Legendre là người đầu tiên cố gắng tìm nghiệm của phương trình hàm Cauchy

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Việc nghiên cứu hệ thống phương trình hàm Cauchy cộng tính đã được khởi xướng bởi A.L. Cauchy trong cuốn sách của ông "Coursd d'Analyse" năm 1821.

Một phương trình bao gồm một hàm chưa biết và một hoặc nhiều đạo hàm của nó được gọi là phương trình vi phân. Ví dụ như

$$f'(x) + mx = 5$$

và

$$f^{''}(x) + f^{'}(x) + sin(x) = 0.$$

Các phương trình gồm tích phân của hàm số chưa biết được gọi là phương trình tích phân. Một vài ví dụ về phương trình tích phân

$$f(x) = e^x - \int\limits_0^x e^{x-t} f(t)\, dt,$$

$$f(x) = sin(x) + \int\limits_0^1 [1 - xcos(xt)] f(t) dt,$$

và

$$f(x) = \int_0^x [tf^2(t) - 1]dt.$$

Phương trình hàm là phương trình trong đó các ẩn là các hàm số. Ví dụ về phương trình hàm là

$$f(x+y) = f(x) + f(y),$$

$$f(x+y) = f(x)f(y),$$

$$f(xy) = f(x)f(y),$$

$$f(xy) = f(x) + f(y),$$

$$f(x+y) = f(x)g(y) + g(x)f(y),$$

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y),$$

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y),$$

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + f(x)f(y),$$

$$f(x+y) = g(xy) + h(x-y),$$

$$f(x) - f(y) = (x-y)h(x+y),$$

$$f(pr, qs) + f(ps, qr) = 2f(p,q) + 2f(r,s),$$

$$g(f(x)) = g(x) + \beta,$$

$$g(f(x)) = \alpha g(x), \alpha \neq 1$$

và

$$f(t) = f(2t) + f(2t-1).$$

Phạm vi của phương trình hàm bao gồm các phương trình vi phân, phương trình sai phân, phương trình tích phân.... Các phương trình hàm là một lĩnh vực của toán học trên 200 năm tuổi. Hơn 5000 bài báo đã được công bố trong lĩnh vực này. Tuy nhiên đối với luận văn thạc sĩ tôi chỉ tập trung nghiên cứu về phương trình hàm Cauchy và một số ứng dụng của nó.

Năm 1747 và 1750, d'Alambert đã công bố 3 bài báo trong đó bài thứ nhất là phương trình hàm (xem Aczél (1966)). Phương trình hàm được nghiên cứu bởi d'Alambert (1747), Euler (1768), Poisson (1804), Cauchy (1821), Darboux (1875) và nhiều nhà toán học khác. Hilbert

(1902) đề xuất trong sự nối tiếp với vấn đề 5 của ông là định lý hàm vi phân cung cấp phương pháp đẹp và mạnh để giải phương trình hàm, trong đó giả thiết khả vi là điều kiện không thể thiếu. Nhờ đề xuất của Hilbert nhiều nghiên cứu về phương trình hàm đã xem xét với các phương trình hàm khác nhau không có một vài hoặc ít các giả thiết đều. Sự nỗ lực này đã góp phần phát triển định lý hiện đại về phương trình hàm. Lý thuyết các dạng quy tắc toán học hiện đại của phương trình hàm ngày càng phát triển nhanh chóng ở cuối thập kỉ 6.

Giải phương trình hàm nghĩa là tìm tất cả các hàm số thỏa mãn phương trình hàm. Để thu được một nghiệm, các hàm số phải bị giới hạn bởi một đặt trưng riêng (như là giải tích, bị chặn, liên tục, lồi, khả vi, đo được hay đơn điệu).

1.1. Phương trình hàm Cauchy một biến

1.1.1. Về phương trình hàm Cauchy cộng tính

Phần này giới thiệu về phương trình hàm Cauchy cộng tính và xác định nghiệm của nó (được trích từ tài liệu[7]).

Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ trong đó $\mathbb{R}$ là tập số thực, f là hàm số thỏa mãn phương trình hàm

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \tag{1.1}$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Phương trình hàm này đã được biết là phương trình hàm Cauchy. Phương trình hàm (1.1) được nghiên cứu đầu tiên bởi A.M. Legendre (1791) và C.F. Gauss (1809) nhưng A.L. Cauchy (1821) là người đầu tiên tìm ra nghiệm trong lớp hàm liên tục. Phương trình (1.1) có vị trí quan trọng trong toán học nó được đề cập tới trong hầu hết các khía cạnh của toán học.

Định nghĩa 1.1 Hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được gọi là hàm cộng tính nếu nó thỏa mãn phương trình hàm Cauchy

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Định nghĩa 1.2 Hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được gọi là hàm tuyến tính khi và chỉ khi nó có dạng

$$f(x) = cx \ (\forall x \in \mathbb{R}),$$

trong đó c là một hằng số tùy ý.

Đồ thị của hàm tuyến tính $f(x) = cx$ là một đường không thẳng, đi qua gốc do đó nó được gọi là tuyến tính. Hàm số tuyến tính thỏa mãn phương trình hàm Cauchy. Các câu hỏi được đưa ra là có hàm nào khác thỏa mãn phương trình hàm Cauchy hay không?

Ta thấy rằng chỉ có nghiệm liên tục của phương trình hàm Cauchy là tuyến tính. Đây là kết quả được chứng minh bởi Cauchy vào năm 1821.

Định lý 1.1 *Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là liên tục và thỏa mãn phương trình hàm Cauchy cộng tính (1.1). Khi đó f tuyến tính, nghĩa là $f(x) = cx$ trong đó c là một hằng số tùy ý.*

Chứng minh. Trước tiên ta cố định x rồi lấy tích phân hai vế của phương trình (1.1) theo biến y ta được

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^1 f(x)dy \\ &= \int_0^1 [f(x+y) - f(y)]dy \\ &= \int_x^{1+x} f(u)du - \int_0^1 f(y)dy, \ \mathit{khi}\ u = x + y. \end{aligned}$$

Vì hàm số f liên tục nên suy ra

$$f'(x) = f(1 + x) - f(x). \tag{1.2}$$

Từ tính cộng tính của f ta có

$$f(1 + x) = f(1) + f(x). \tag{1.3}$$

Thay (1.3) vào (1.2) ta có $f'(x) = f(1) = c$. Suy ra $f(x) = cx + d$ thay vào (1.1) suy ra $d = 0$.

Trong Định lý 1.1 ta sử dụng tính liên tục của f để kết luận rằng f khả tích. Tính tích phân của f bắt buộc nghiệm f của phương trình

Cauchy cộng tính là tuyến tính. Do đó mỗi nghiệm khả tích của phương trình Cauchy cộng tính cũng tuyến tính.

Định nghĩa 1.3 Một hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được gọi là khả tích địa phương khi và chỉ khi nó là tích phân trên mọi khoảng hữu hạn.

Theo trên mỗi nghiệm khả tích địa phương của phương trình Cauchy cộng tính cũng là tuyến tính. Ta đưa ra một cách chứng minh được đưa ra bởi Shapiro 1973. Giả sử f là một nghiệm khả tích địa phương của phương trình Cauchy cộng tính. Do đó $f(x+y) = f(x) + f(y)$ đúng với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Từ đó sử dụng tính khả tích địa phương của f ta được

$$
\begin{aligned}
yf(x) &= \int\limits_0^y f(x)dz \\
&= \int\limits_0^y [f(x+z) - f(z)]dz \\
&= \int\limits_x^{x+y} f(u)du - \int\limits_0^y f(z)dz \\
&= \int\limits_0^{x+y} f(u)du - \int\limits_0^x f(u)du - \int\limits_0^y f(u)du.
\end{aligned}
$$

Vế phải của đẳng thức trên bất biến khi ta thay đổi vai trò của x và y từ đó suy ra

$$yf(x) = xf(y)$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Do đó với $x \neq 0$ ta được

$$\frac{f(x)}{x} = c,$$

với c là một hằng bất kỳ. Điều này suy ra $f(x) = cx$ với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Cho $x = 0$ và $y = 0$ ở (1.1) ta được $f(0) = 0$. Như vậy f là một hàm tuyến tính trên $\mathbb{R}$.

Mặc dù chứng minh của Định lý 1.1 ngắn gọn và chỉ gồm các phép tính vi phân, tích phân nhưng nó lại không hiệu quả cao và có nhiều kiến thức. Giờ ta sẽ trình bày một cách chứng minh khác sẽ giúp ta hiểu hơn về nghiệm của phương trình Cauchy cộng tính.

Ta xét định nghĩa sau.